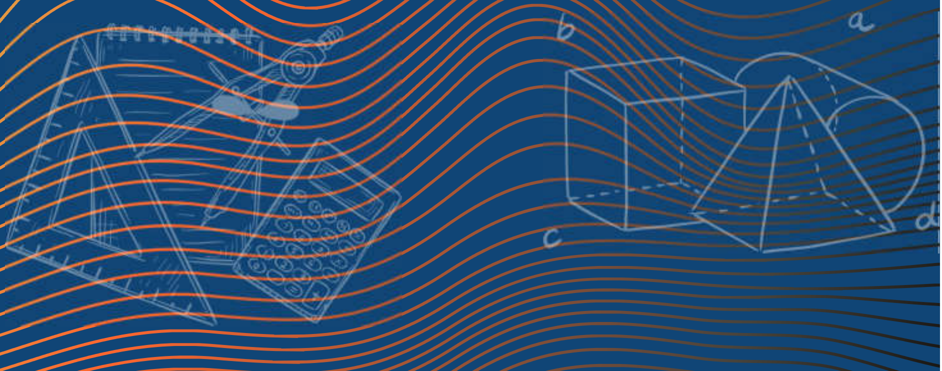
SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT PHẠM PHÚ THỨ

SỔ TAY KIẾN THỨC

8 CHỦ ĐỀ TRỌNG TÂM CHƯƠNG TRÌNH MỚI
ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT QG 2025

MÔN TOÁN



Đà Nẵng, tháng 03 năm 2025

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Các em thân mến!

Trên tay các em là cuốn "SỔ TAY KIẾN THỨC TOÁN 12" được Thầy Cô biên soạn dựa trên 8 chủ đề thi Tốt nghiệp THPT QG môn Toán theo chương trình mới từ năm 2025.

Năm học này là năm đầu tiên lớp 12 được học theo chương trình GDPT mới 2018 và cũng là năm đầu tiên thi tốt nghiệp đầu ra của chương trình này. Chương trình mới với hình thức thi hoàn toàn mới, khi mà số lượng câu hỏi được giảm đi đáng kể, hình thức câu hỏi cũng đa dạng hơn trước với lượng thời gian không đổi; khi đó, các câu hỏi sẽ tập trung vào chiều sâu, cũng như bóc tỉa nhiều vấn đề của một nội dung kiến thức, đòi hỏi các em phải nắm thật chắc kiến thức nền tảng. Liệt kê ra các chủ đề kiến thức của bài thi TN THPT, từ đó chinh phục từng chủ đề một là việc làm đầu tiên và cần thiết để các em làm chủ kiến thức, tự tin hơn và từ đó chinh phục bài thi mang tính bước ngoặc sắp đến.

Từ những yêu cầu thực tế trên, Thầy Cô đưa vào đây những kiến thức trọng tâm nhất với các định nghĩa, định lí, tính chất và hệ quả được trình bày đầy đủ và chi tiết, xem như là "gốc", là "xương sống" trong chương trình phổ thông cũng như của bài thi tốt nghiệp môn Toán.

Cuốn SỔ TAY KIẾN THỨC TOÁN 12 được Thầy Cô biên soạn dành riêng cho các em học sinh trường THPT Phạm Phú Thứ khóa thi tốt nghiệp THPT 2025. Hi vọng nó sẽ giúp ích phần nào trong hành trình chinh phục môn Toán thời phổ thông của các em.

Gửi đến các em với thật nhiều sự tận tâm, trách nhiệm và đầy yêu thương!

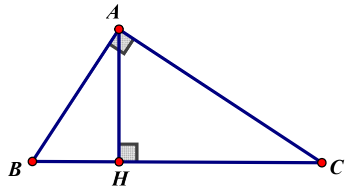
Hòa Sơn, tháng 03 năm 2025

Tổ Toán trường THPT Phạm Phú Thứ.

CHỦ ĐỀ 0. MỘT SỐ KIẾN THỨC NỀN TẢNG

I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. DIỆN TÍCH

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông. Tỉ số lượng giác



- $AB^2 + AC^2 \overset{Pitago}{=} BC^2$;
- $AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.BC$;
- $AH^2 = BH.CH$; $AH.BC = AB.AC$;
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow \boxed{AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}}$.
- $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ (đối/huyền);
- $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$ (kề/huyền);
- $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$ (đối/kề) ;
- $\cot B = \dfrac{AB}{AC}$ (kề/đối).

2. Định lý sin. Định lý côsin. Diện tích tam giác

Gọi: R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp và nửa chu vi của một tam giác.

- **ĐL sin:** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.
- **ĐL côsin:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.

  Hệ quả: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

  *(tổng bình phương **hai cạnh kề** trừ bình phương **cạnh đối; chia 2** lần tích **hai cạnh kề**)*

- **Diện tích:**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}h_b.b = \frac{1}{2}h_c.c \ ;$$

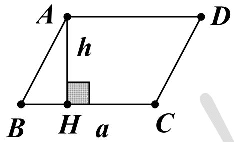
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}.$$

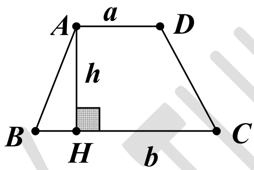
3. Công thức nhanh tính diện tích một số hình thường gặp

- ΔABC **vuông** tại A: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}AH.BC$.
- **Tam giác đều**: ▪ Đường cao $= \dfrac{(canh)\times\sqrt{3}}{2}$. ▪ Diện tích: $= \dfrac{(canh)^2.\sqrt{3}}{4}$.
- **Hình vuông**: ▪ Đường chéo $= (canh)\times\sqrt{2}$. ▪ Diện tích: $= (canh)^2$.

- **Hình chữ nhật** $ABCD$:
  - Đường chéo $= \sqrt{AB^2 + AD^2}$.
  - Diện tích: $S = AB.AD$ (*dài x rộng*).
- **Hình bình hành:** $S = a.h$.
  (cạnh đáy x đường cao tương ứng)



- **Hình thang:** $S = \dfrac{a+b}{2}.h$.
  (*trung bình cộng hai đáy x chiều cao*).



- **Hình thoi**: $S = \dfrac{1}{2}$ x *tích 2 đường chéo.*

  ***Đặc biệt*:** Hình thoi có một góc bằng $60°$ hoặc $120°$ được tạo bởi 2 tam giác đều.

- **Tứ giác có hai đường chéo vuông góc**: $S = \dfrac{1}{2}$ x *tích 2 đường chéo.*

II. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Các hệ thức cơ bản

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; ▪ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; ▪ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; ▪ $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$;
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; ▪ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.
- $\begin{cases} \forall k = 2n \\ \sin(\alpha + k\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha \end{cases}$; ▪ $\begin{cases} \forall k = 2n+1 \\ \sin(\alpha + k\pi) = -\sin\alpha \\ \cos(\alpha + k\pi) = -\cos\alpha \end{cases}$; ▪ $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \\ \tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \\ \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha \end{cases}$.

2. Các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

Đối: $\alpha\,;-\alpha$	**Bù:** $\alpha\,;\ \pi-\alpha$	**Phụ:** $\alpha\,;\ \dfrac{\pi}{2}-\alpha$	**Khác pi:** $\alpha;\ \pi+\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$	$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

3. Công thức cộng

- $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$; ▪ $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$;
- $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$; ▪ $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$;
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$; ▪ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$.

4. Công thức nhân đôi. Hạ bậc

- $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$; ▪ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;
- $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$;
- $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; ▪ $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; ▪ $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

5. Công thức tổng thành tích

- $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$; ▪ $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$;
- $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$; ▪ $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$;
- $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}.\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$;
- $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. Công thức tích thành tổng

- $\cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$; ▪ $\sin a.\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$;
- $\sin a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$.

7. Kỹ thuật làm mất dấu TRỪ

- $-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$; ▪ $-\cos\alpha=\cos(\pi\pm\alpha)$; ▪ $-\tan\alpha=\tan(-\alpha)$; ▪ $-\cot\alpha=\cot(-\alpha)$.

III. CÔNG THỨC MŨ – LOGARIT

1. Công thức lũy thừa

Cho các số dương $a,\ b$. Ta có:

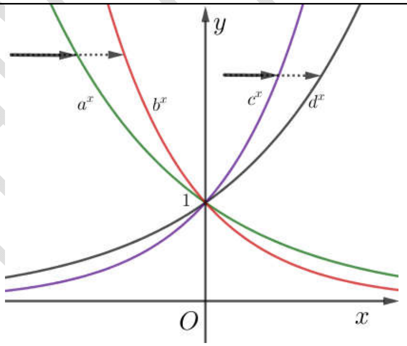
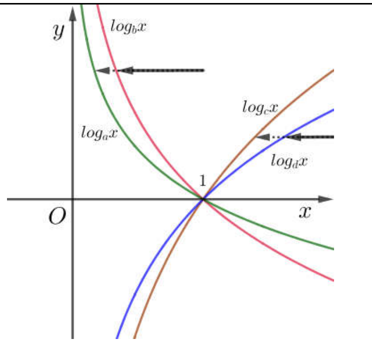
- $a^0=1$ ▪ $a^n=\underbrace{a.a...a}_{n\ thua\ so}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ ▪ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ▪ $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$
- $a^m.a^n=a^{m+n}$ ▪ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ▪ $a^nb^n=(ab)^n$ ▪ $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ với $m,\ n\in\mathbb{N}^*$. ***Đặc biệt:*** $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$.

2. Công thức logarit

Cho các số $a,\ b>0,\ a\neq 1$ và $m,\ n\in\mathbb{R}$. Ta có:

$\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^{\alpha}=b$	$\lg b=\log b=\log_{10} b$	$\ln b=\log_e b$
$\log_a 1=0$	$\log_a a=1$	$\log_a a^n=n$
$\log_{a^m} b=\dfrac{1}{m}\log_a b$	$\log_a b^n=n\log_a b$	$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$
$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$	$\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$	$\begin{cases} a^{\log_a b}=b \\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$
$\log_a b.\log_b c=\log_a c$ $(b\neq 1)$	$\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c$ $(b\neq 1)$	$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

3. Hàm số mũ và hàm số logarit

	Hàm số mũ	**Hàm số logarit**
Dạng	$y=a^x$ với $0<a\neq 1$	$y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$
Tập xác định	$D=\mathbb{R}$	$D=(0;+\infty)$
Tập giá trị	$y\in(0;+\infty)$	$y\in\mathbb{R}$
Đạo hàm	$y=a^x \longrightarrow y'=a^x\ln a$	$y=\log_a x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
Sự biến thiên	$\boxed{a>1}$ thì hàm **ĐB** trên $\mathbb{R}$ $\boxed{0<a<1}$ thì hàm **NB** trên $\mathbb{R}$	$\boxed{a>1}$: hàm **ĐB** trên $(0;+\infty)$ $\boxed{0<a<1}$: hàm **NB** trên $(0;+\infty)$
Đồ thị **"trên $\to$ mũ; phải $\to$ log"**	 Để so sánh $a,\ b,c,d$ ta vẽ đường thẳng $x=1$.	 Để so sánh $a,\ b,c,d$ ta vẽ đường thẳng $y=1$.

CHỦ ĐỀ 1. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình $\sin x = m$ ***(1)***

Với $|m| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.

Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.

Khi đó, ta có: $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Chú ý: Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\sin x = m$

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$;
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$;
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau: $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) *Phương* trình $\cos x = m$ ***(2)***

Với $|m| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.

Với $|m| \le 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$.

Khi đó, ta có: $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Chú ý: Ta có một số trường hợp đặc biệt sau của phương trình $\cos x = m$

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$;
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$;
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^\circ$ như sau: $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

c) Phương trình $\tan x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$.

Khi đó, ta có: $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a^\circ$ như sau: $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

d) Phương trình $\cot x = m$

Gọi α là số thực thuộc đoạn $\left(0;\pi\right)$ sao cho $\cot\alpha = m$.

Khi đó, ta có: $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\left(k\in Z\right)$.

Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a^\circ$ như sau: $\cot x = \cot\alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản

- $\sin f\left(x\right) = \sin g\left(x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = g\left(x\right) + k2\pi \\ f\left(x\right) = \pi - g\left(x\right) + k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- $\cos f\left(x\right) = \cos g\left(x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = g\left(x\right) + k2\pi \\ f\left(x\right) = -g\left(x\right) + k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- Với phương trình có dạng:
$$\sin^2 u\left(x\right) = \sin^2 v\left(x\right), \cos^2 u\left(x\right) = \cos^2 v\left(x\right), \sin^2 u\left(x\right) = \cos^2 v\left(x\right)$$
ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình dạng $\cos f\left(x\right) = \cos g\left(x\right)$.
- Với một số phương trình lượng giác khác, ta có thể dùng các công thức lượng giác và các biến đổi để đưa về phương trình dạng tích $A\left(x\right).B\left(x\right) = 0$.

II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương trình mũ

Với $a > 0, a \ne 1$ thì: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f\left(x\right) = \log_a b$ với $b > 0$;

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f\left(x\right) = g\left(x\right).$$

2. Phương trình lôgarit

Vơi $a>0, a\neq 1$ thì: $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b$.

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \text{ hoac } g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}.$$

3. Bất phương trình mũ

Với $a>0, a\neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $a^{f(x)}>b$ **.**

- Nếu $b\leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là tập xác định của $f(x)$;
- Nếu $b>0, a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>\log_a b$;
- Nếu $b>0, 0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)<\log_a b$.

b) Xét bất phương trình: $a^{f(x)}>a^{g(x)}$**.**

- Nếu $a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>g(x)$;
- Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)<g(x)$.
- *Các bất phương trình mũ khác cùng loại được giải tương tự.*

4. Bất phương trình lôgarit

Với $a>0, a\neq 1$ thì:

a) Xét bất phương trình: $\log_a f(x)>b$ **.**

- Nếu $a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>a^b$;
- Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $0<f(x)<a^b$.

b) Xét bất phuơng trình: $\log_a f(x)>\log_a g(x)$**.**

- Nếu $a>1$ thì bất phương trình đưa về: $f(x)>g(x)>0$;
- Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình đưa về: $0<f(x)<g(x)$.
- *Các bất phương trình lôgarit khác cùng loại được giải tương tự.*

CHỦ ĐỀ 2. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

I. CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là cấp số cộng nếu $\boxed{u_n = u_{n-1} + d}$ với $n \geq 2, d$ là số không đổi.

Số d gọi là **công sai** của cấp số cộng, $\boxed{d = u_n - u_{n-1}}$ với $n \geq 2$.

Nếu $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d có: $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$ với $n \geq 2$.

Chú ý: Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành CSC $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ta có:

$$\boxed{S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}} \text{ hoặc } \boxed{S_n = \frac{\left[2u_1 + (n-1)d\right]n}{2}}.$$

II. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) là cấp số nhân nếu $\boxed{u_n = u_{n-1}.q}$ với $n \geq 2, q$ là số không đổi.

Số q gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì: $\boxed{q = \frac{u_n}{u_{n-1}}}$ với $n \geq 2$.

Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu u_1 và công bội q có: $\boxed{u_n = u_1 \cdot q^{n-1}}$ với $n \geq 2$.

Chú ý: Ba số a, b, c theo thứ tự lập thành CSN $\Leftrightarrow a.c = b^2$.

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q\,(q \neq 1)$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ta có: $\boxed{S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}}$.

Cấp số nhận lùi vô hạn: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_1}{1-q}$ với $|q| < 1$.

CHỦ ĐỀ 3. ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

I. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;b\right)$ và điểm $x_0\in\left(a;b\right)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm cúa hàm số $y=f\left(x\right)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'\left(x_0\right)$ hoặc $y'\left(x_0\right)$.

$$\boxed{f'\left(x_0\right)=y'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}}.$$

b) Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Đạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm vật lí. Chẳng hạn: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s\left(t\right)$, với $s=s\left(t\right)$ là một hàm số có đạo hàm. **Vận tốc tức thời** của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s=s\left(t\right)$ tại t_0:

$$\boxed{v\left(t_0\right)=s'\left(t_0\right)}.$$

c) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- **Hệ số góc của tiếp tuyến** của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ **tại** điểm $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là:

$$\boxed{k=f'\left(x_0\right)}.$$

- **Phương trình tiếp tuyến** của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ **tại** điểm $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là:

$$\boxed{y=f'\left(x_0\right).\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)}.$$

d) Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u=g\left(x\right)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y=f\left(u\right)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ có đạo hàm tại x là

$$\boxed{y_x'=y_u'\cdot u_x'}.$$

e) Đạo hàm của một số hàm số

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u=u\left(x\right)$)

$\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cdot\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\cdot\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = u'\cdot e^u$
$\left(a^x\right)' = a^x\ln a$	$\left(a^u\right)' = u'\cdot a^u\ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$

g) Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử $f = f(x), g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Ta có: $(f+g)' = f' + g'$; $(f-g)' = f' - g'$;

$(fg)' = f'g + fg'$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g = g(x) \neq 0)$.

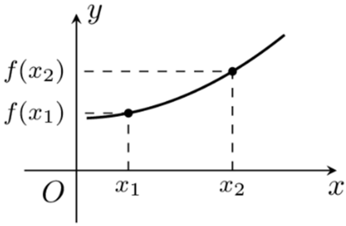
Hệ quả: Cho $f = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

- Nếu c là một hằng số thì: $(cf)' = cf'$.
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ $\left(f = f(x) \neq 0\right)$.

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định lí

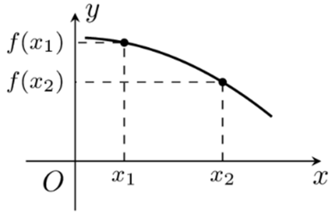
Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên tập $K\subset\mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'\left(x\right)\geq 0$ (hoặc $f'\left(x\right)\leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'\left(x\right)=0$ **chỉ tại một số hữu hạn điểm** của K thì hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K .



Hàm đồng biến trên K

$f'\left(x\right)\geq 0\ \forall x\in K$

đồ thị là một "**đường đi lên**"



Hàm nghịch biến trên K

$f'\left(x\right)\leq 0\ \forall x\in K$

đồ thị là một "**đường đi xuống**"

2. Các bước tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $f\left(x\right)$

Bước 1. Tìm **tập xác định** của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm $x_i\ \left(i=1,2,\ldots,n\right)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và **lập bảng biến thiên**.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu **kết luận** về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

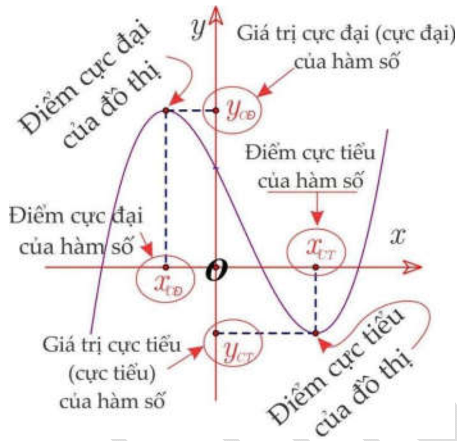
Chú ý: Ta cũng có thể nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng cách quan sát hình dáng của đồ thị hàm số đó:

- Khoảng đi lên (hàm số đồng biến trên khoảng đó);
- Khoảng đi xuống (hàm số nghịch biến trên khoảng đó).

III. ĐIỂM CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K, x_1 \in K$.



- x_0 được gọi là một **điểm cực đại của hàm số** đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b)$ và $x \neq x_0$.
  Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số đã cho, kí hiệu là $f_{CĐ}$
- x_1 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c;d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c;d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c;d)$ và $x \neq x_1$.
  Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT}.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)**.

Chú ý: Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

b) Dấu hiệu nhận biết cực trị của hàm số bằng đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

<table>
<tr>
<td>Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.
<table>
<tr><td>x</td><td>a</td><td>x_0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td>–</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>↘</td><td>$f(x_0)$
(cực tiểu)</td><td>↗</td></tr>
</table>
</td>
<td>Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.
<table>
<tr><td>x</td><td>a</td><td>x_0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td>+</td><td></td><td>-</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>↗</td><td>$f(x_0)$
(cực đại)</td><td>↘</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

c) Các Bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm **tập xác định** của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính **đạo hàm** $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và **lập bảng biến thiên**.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu **kết luận** về các điểm cực trị của hàm số.

IV. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D, kí hiệu $M=\max\limits_{D} f(x)$, nếu $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D, kí hiệu $m=\min\limits_{D} f(x)$, nếu $f(x)\ge m$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_1\in D$ sao cho $f(x_1)=m$.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1,x_2,\ldots,x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n),f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 2.

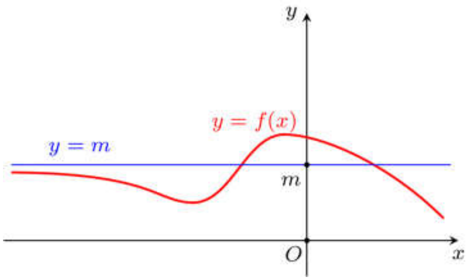
Số lớn nhất trong các giá trị đó ***là giá trị lớn nhất*** của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, ***số nhỏ nhất*** trong các giá trị đó ***là giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

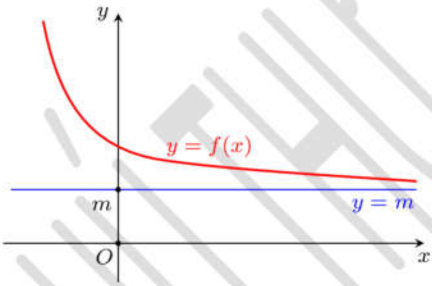
V. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

a) Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y=m$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu:

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=m \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=m$$





b) Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=+\infty;\ \lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=-\infty;\ \lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=+\infty;\ \lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=-\infty.$$

c) Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b\left(a\neq 0\right)$ được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right]=0.$$

Ta xác định hệ số a và b của tiệm cận xiên có phương trình $y=ax+b$ trong 2 trường hợp sau:

1. Tính $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$.

2. Tính $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$.

VI. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: Tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản), ...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

CHỦ ĐỀ 4. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

I. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. **Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$** với mọi x thuộc K.
- Nếu $F(x)$ **là một nguyên hàm của hàm số** $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$ với C là một hằng số. Vì vậy:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C.$$
- Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K. Ta có:
$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

2. Tính chất

Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k.\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với k **là hằng số khác 0**;
- $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x-\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

• $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ với $\alpha\neq-1$	• $\int\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$
• $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$	• $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$
• $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$	• $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$
• $\int a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ với $a>0,a\neq1$.	

II. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

2. Tính chất

Cho các hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Ta có:

- $\int_a^b kf\left(x\right)\mathrm{d}x = k.\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ (k **là hằng số**).
- $\int_a^b \left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.
- $\int_a^b \left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x - \int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

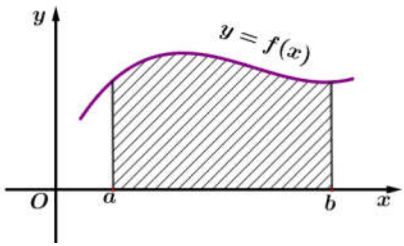
Giả sử m,n,c là ba số thực tuỳ ý thuộc đoạn $\left[a;b\right]$, ta có:

$$\int_m^c f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_c^n f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_m^n f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

3. Ứng dụng

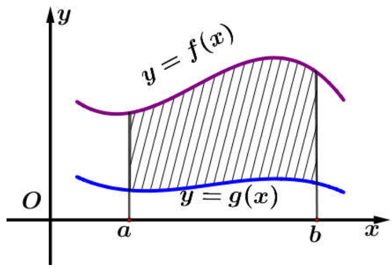
▪ Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là:

$$S=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x.$$

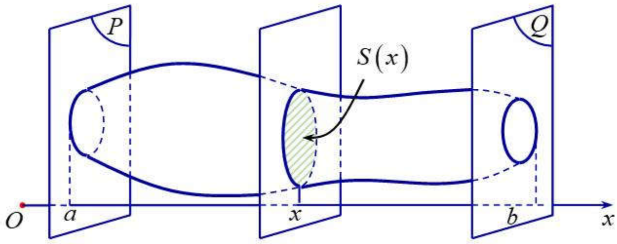


▪ Cho các hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b$ là:

$$S=\int_a^b \left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x.$$



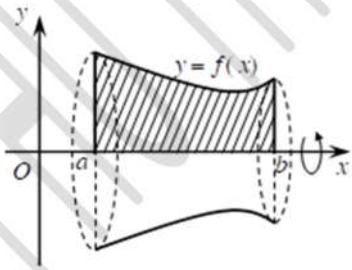
▪ Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=a$ và $x=b$. $\left(a<b\right)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại điểm x $\left(a\le x\le b\right)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S\left(x\right)$. Giả sử hàm số $S\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$.



Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức:

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

▪ Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:



$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

CHỦ ĐỀ 5. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

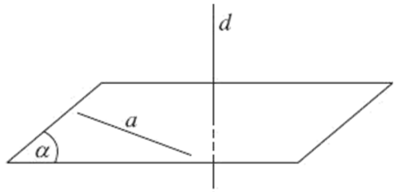
1. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°, kí hiệu $a \perp b$.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu đường thẳng d **vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng** (α), kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.



b) Dấu hiệu nhận biết

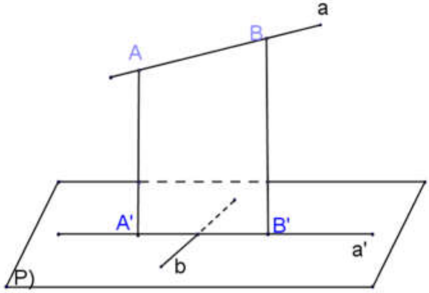
Nếu một đường thẳng **vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau** cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

c) Tính chất

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước
- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

d) Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, b vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).



3. Hai mặt phẳng vuông góc

a) Định nghĩa

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng $(P),(Q)$ gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $(P)\perp(Q)$.

b) Dấu hiệu nhận biết

Nếu mặt phẳng này **chứa một đường thẳng** mà **đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia** thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

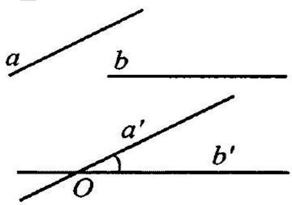
c) Tính chất

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến (*của 2 mặt phẳng*) cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

II. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b, kí hiệu (a,b) hoặc $\widehat{(a,b)}$.

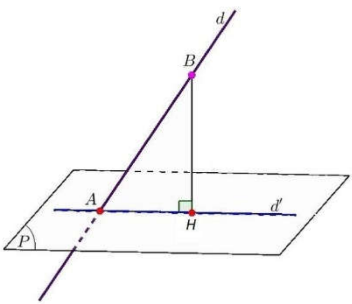


Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian có số đo từ $0°$ đến $90°$.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có định nghĩa sau:

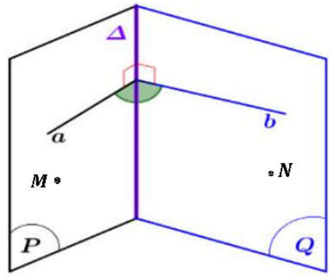
- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90°.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P), kí hiệu $(d,(P))$.



Nhận xét: **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0° đến 90°.**

3. Góc nhị diện

Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ; kí hiệu $[P,\Delta,Q]$ hoặc $[M,\Delta,N]$, trong đó $(P),(Q)$ là hai nửa mặt phẳng có chung bờ là đường thẳng Δ và M,N là các điểm lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng $(P),(Q)$. Đường thẳng Δ gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng $(P),(Q)$ gọi là một mặt của góc nhị diện.



Cho góc nhị diện. Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.

Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.

Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.

***Nhận xét:* Góc nhị diện có số đo từ 0° đến 180°.**

III. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên Δ, kí hiệu $d(M,\Delta)$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên (P), kí hiệu $d(M,(P))$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $d(\Delta,\Delta')$.

4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

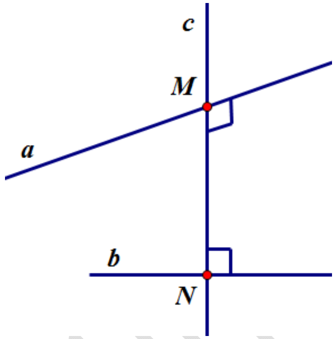
Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P). Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P), kí hiệu $d(\Delta,(P))$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $d((P),(Q))$.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng a,b chéo nhau.



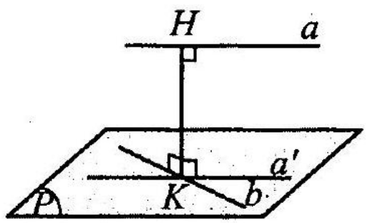
▪ **Có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a,b**, gọi là **đường vuông góc chung** của hai đường thẳng đó.

▪ Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a,b gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

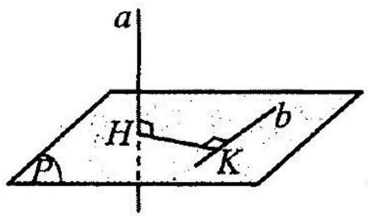
▪ Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a,b gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $d\left(a,b\right)$.

Nhận xét

▪ Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa b và song song với a, hình chiếu của a trên $\left(P\right)$ là a', giao điểm của a' và b là K, hình chiếu của K trên a là H. Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của a và b. Ngoài ra, $d\left(a,b\right)=HK=d\left(a,\left(P\right)\right)$.



▪ Trong trường hợp đặc biệt $a\perp b$, ta có thể xác định như sau: Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa b và vuông góc với a, giao điểm của a và $\left(P\right)$ là H, hình chiếu của H trên b là K. Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của a và b.



IV. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ KHỐI ĐA DIỆN

- Công thức tính thể tích của **khối lăng trụ**: $\boxed{V=Sh}$.

  Trong đó V,S,h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối lăng trụ.

- Công thức tính thể tích của **khối chóp**: $\boxed{V=\frac{1}{3}Sh}$.

  Trong đó V,S,h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối chóp.

- Công thức tính thể tích của **khối chóp cụt đều**: $\boxed{V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)}$.

  Trong đó V,h,S_1,S_2 lần lượt là thể tích, chiều cao, diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

CHỦ ĐỀ 6. VECTƠ VÀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ

1. Vectơ và các phép toán vectơ

a) Các khái niệm

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

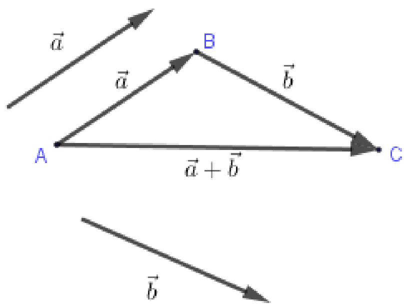
Giá của vectơ là đường thẳng đi qua hai đầu mút của vectơ; **độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa hai đầu mút của vectơ; **hai vectơ cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau; **hai vectơ bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài; **vectơ-không** (kí hiệu $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau; **hai vectơ đối nhau** nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

b) Các phép toán vectơ trong không gian

Tổng và hiệu của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.
- **Hiệu** của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.



Chú ý

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (*Quy tắc hình bình hành*).
- Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ (*Quy tắc hình hộp*).
- Với ba điểm O,A,B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ (*Quy tắc hiệu*).

Tích của một số với một vectơ

Cho số thực $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- **Hướng**: *Cùng hướng* với $\vec{a}$ nếu $k>0$, *ngược hướng* với $\vec{a}$ nếu $k<0$;
- **Độ dài:** Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Chú ý

- Ta có $k\vec{a}=0$ khi và chi khi $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Với hai vectơ bất kì $\vec{a},\vec{b}$ và hai số thực h,k, ta có:

  $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b};$ $\quad k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}-k\vec{b};$ $\quad (h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a};$

  $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a};$ $\quad 1\vec{a}=\vec{a};$ $\quad (-1)\vec{a}=-\vec{a}.$
- ***Hai vectơ*** $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$ là ***cùng phương*** khi và chỉ khi có một số thực $k\neq 0$ sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.
- Nếu I là ***trung điểm*** của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- Nếu G là ***trọng tâm*** của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- ***Điều kiện cần và đủ để ba điểm*** A,B,C ***thẳng hàng*** là có số thực $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, **là một số thực** được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

ở đó $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

Chú ý: Với các vectơ bất kì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$ $\quad \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c};$

  $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right);$ $\quad \vec{a}^2\geq 0$ trong đó $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.
- Ngoài ra: $\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$.

II. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Xét không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$.

1. Toạ độ của vectơ

$\overrightarrow{OM}=(a;b;c)\Leftrightarrow M(a;b;c)$.

Toạ độ của một vectơ $\vec{u}$ là tọa độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$.

Nếu $\vec{u}=(a;b;c)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.

Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ thì $\vec{u}=(a;b;c)$.

Với $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, ta có: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{cases}$.

Cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A).$$

2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)$. Khi đó:

- $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$;
- $\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2)$;
- $m\vec{u}=(mx_1;my_1;mz_1)$ với $m\in\mathbb{R}$;
- $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;
- $[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)=(y_1z_2-y_2z_1;z_1x_2-z_2x_1;x_1y_2-x_2y_1)$.

Chú ý

- Hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1),\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)\left(\vec{v}\neq\vec{0}\right)$ **cùng phương** khi và chỉ khi có một số thực m sao cho $\vec{u}=m.\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=mx_2\\ y_1=my_2\\ z_1=mz_2\end{cases}$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Nếu $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ thì
$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$
- Với hai vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)$ khác vectơ $\vec{0}$, ta có:
$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$
- Cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$. Nếu $M(x_M;y_M;z_M)$ là ***trung điểm*** đoạn thẳng AB thì:
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2};z_M=\frac{z_A+z_B}{2}.$$
- Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A;z_A),B(x_B;y_B;z_B),C(x_C;y_C;z_C)$.
Nếu $G(x_G;y_G;z_G)$ là ***trọng tâm*** tam giác ABC thì
$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}.$$

3. Phương trình mặt phẳng

a) Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có **giá vuông góc** với mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ được gọi là **vectơ pháp tuyến** của mặt phẳng (P).
- Hai vectơ không cùng phương có **giá song song** hoặc thuộc mặt phẳng (P) được gọi là **cặp vectơ chỉ phương** của mặt phẳng (P).

  Chú ý: Nếu hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b) Phương trình mặt phẳng

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n}=(a;b;c)$ làm vectơ pháp tuyến có **phương trình tổng quát** là:

$$\boxed{ax+by+cz+d=0} \text{ với } d=-ax_0-by_0-cz_0.$$

Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ có **phương trình chính tắc** là: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$.

c) Điều kiện song song và vuông góc của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ lần lượt có phương trình tổng quát là:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Gọi $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1),\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$.

- $(P_1)//(P_2)\Leftrightarrow$ Tồn tại số thực $k\neq 0$ sao cho $\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}$.
- $(P_1)\perp(P_2)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

d) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$ được tính theo công thức:

$$d(M_0,(P))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. Phương trình đường thẳng

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Nếu vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ và có **giá song song hoặc trùng** với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ.

b) Phương trình đường thẳng

- Hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0, t là tham số, được gọi là **phương trình tham số** của đường thẳng Δ đi qua $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(a; b; c\right)$.
- Đường thẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \left(a; b; c\right)$ (với $abc \neq 0$) thì có **phương trình chính tắc** là: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

- ### *c) Vị trí tương đối của hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$;
- Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$;
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

5. Phương trình mặt cầu

- Phương trình của mặt cầu tâm $I\left(a; b; c\right)$ bán kính R là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

  Ngoài ra, nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu **tâm** $I\left(a; b; c\right)$ và **bán kính** $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

6. Góc

a) Côsin của góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có **vectơ chỉ phương** lần lượt là $\vec{u}_1=\left(a_1;b_1;c_1\right)$, $\vec{u}_2=\left(a_2;b_2;c_2\right)$. Khi đó, ta có:

$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Nhận xét: $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

b) Sin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(a_1;b_1;c_1\right)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(a_2;b_2;c_2\right)$. Khi đó, ta có:

$$\sin\left(\Delta,(P)\right)=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

c) Côsin của góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$, $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$. Khi đó, ta có:

$$\cos\left(\left(P_1\right),\left(P_2\right)\right)=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

CHỦ ĐỀ 7. MỘT SỐ YẾU TỐ VỀ THỐNG KÊ

I. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 1*.

- Trung điểm x_i của nửa khoảng (*tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút*) ứng với nhóm i là **giá trị đại diện** của nhóm đó.
- **Số trung bình cộng** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức:

$$\boxed{\overline{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_mx_m}{n}}.$$

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1;a_2)$	x_1	n_1
$[a_2;a_3)$	x_2	n_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$[a_m;a_m+1)$	x_m	n_m
		$n=n_1+n_2+\ldots+n_m$

Bảng 1

Ý nghĩa: Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu đó ***khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng***.

2. Trung vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $c_{k-1}<\frac{n}{2}$ nhưng $c_k\ge\frac{n}{2}$. Ta gọi r,d,n_k lần lượt là **đầu mút trái, độ dài, tần số** của nhóm k; c_{k-1} là tần số tích luỹ của nhóm $k-1$.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[a_1;a_2)$	n_1	$c_1=n_1$
$[a_2;a_3)$	n_2	$c_2=n_1+n_2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$[a_m;a_{m+1})$	n_m	$c_m=n_1+n_2+\ldots+n_m$
	n	

Bảng 2

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e, được tính theo công thức sau:

$$\boxed{M_e=r+\left(\frac{n/2-c_{k-1}}{n_k}\right)\cdot d}.$$ ***Quy ước:*** $c_0=0$.

Ý nghĩa: Trung vị của mẫu số liệu có thể dùng để **đại diện cho mẫu số liệu** đó.

3. Tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

- Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $c_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $c_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, h, n_p lần lượt là **đầu mút trái, độ dài, tần số** của nhóm p; c_{p-1} là tần số tích luỹ của nhóm $p-1$.

  Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau: $\boxed{Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - c_{p-1}}{n_p}\right) \cdot h}$.

- ***Tứ phân vị thứ hai*** Q_2 bằng trung vị M_e.
- Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $c_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $c_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, l, n_q lần lượt là **đầu mút trái, độ dài, tần số** của nhóm q; c_{q-1} là tần số tích luỹ của nhóm $q-1$.

  Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau: $\boxed{Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - c_{q-1}}{n_q}\right) . l}$.

Ý nghĩa: Tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu **chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần chứa** 25% **giá trị**.

4. Mốt

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là **đầu mút trái, độ dài, tần số** của nhóm $i; n_{i-1}, n_{i+1}$ lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$.
Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o, được tính theo công thức sau:

$$\boxed{M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}}\right) \cdot g}.$$

Quy ước: $n_0 = 0; n_{m+1} = 0$.

Ý nghĩa: Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm có thể **dùng để đo xu thế trung tâm** của mẫu số liệu đó.

II. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Khoảng biến thiên

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 3*, trong đó n_1 và n_m là các số nguyên dương.

Gọi a_1, a_{m+1} lần lượt là **đầu mút trái** của nhóm 1, **đầu mút phải** của nhóm m.

Hiệu $R = a_{m+1} - a_1$ được gọi là **khoảng biến thiên** của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
$\ldots$	$\ldots$
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 3

Ý nghĩa

- ***Khoảng biến thiên*** của mẫu số liệu ghép nhóm ***đo mức độ phân tán*** cho mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Để đo mức độ phân tán, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị a_1 và a_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó *dễ bị ảnh hưởng* bởi các *giá trị bất thường*.

2. Khoảng tứ phân vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2*.

Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là **khoảng tứ phân vị** của mẫu số liệu đó.

Ý nghĩa: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp ***xác định các giá trị bất thường*** của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị *thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên* vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó ***không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường*** **đó**.

3. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 1*, $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó.

Phương sai của mẫu số liệu: $\boxed{s^2 = \dfrac{n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_m\left(x_m - \overline{x}\right)^2}{n}}$.

Căn bậc hai (số học) của phương sai được gọi là **độ lệch chuẩn** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa

Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để ***đo mức độ phân tán*** của mẫu số liệu ghép nhóm đó. ***Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu***.

Khi ***hai mẫu số liệu*** ghép nhóm có ***cùng đơn vị đo*** và có ***số trung bình cộng bằng nhau*** (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có ***độ lệch chuẩn nhỏ hơn*** thì ***mức độ phân tán*** (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ ***thấp hơn***.

CHỦ ĐỀ 8. MỘT SỐ YẾU TỐ VỀ XÁC SUẤT

I. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1. Quy tắc cộng

Một công việc **được hoàn thành bởi một trong hai** hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $(k \in \mathbb{N}, k > 2)$.

2. Quy tắc nhân

Một công việc **được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp**. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m\,.\,n$ cách hoàn thành.

Quy tắc nhân có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi k hành động liên tiếp $(k \in \mathbb{N}, k > 2)$.

3. Hoán vị

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$). ***Mỗi kết quả của sự sắp xếp*** thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi ***là một hoán vị*** của n phần tử đó.
Kí hiệu P_n ***là số các hoán vị của*** n phần tử. Ta có: $\mathrm{P}_n = n(n-1)\ldots .2.1 = n!$.

4. Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $0 \le k \le n$. Mỗi kết quả của việc ***lấy*** k ***phần tử từ*** n ***phần tử*** của tập hợp A và ***sắp xếp chúng theo một thứ tự*** nào đó được gọi là một chỉnh hợp tập k của n phần tử đã cho. Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử. Ta có: $\boxed{\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$.

5. Tổ hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $0 \le k \le n$. Mỗi ***tập con gồm*** k ***phần tử được lấy ra từ*** n phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó. Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $0 \le k \le n$. Ta có: $\boxed{\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}}$.

Quy ước: $0! = 1, \mathrm{C}_n^0 = 1$. Với những quy ước đó, ta có: $\boxed{\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}\,(0 \le k \le n)$.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Một số khái niệm

- ***Không gian mẫu*** Ω là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. ***Biến cố*** ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) ***là một tập con của không gian mẫu***. Tập rỗng $\varnothing$ là ***biến cố không thể***, Ω ***là biến cố chắc chắn***, $\overline{A}=\Omega\setminus A$ là ***biến cố đối*** của biến cố A.
- Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau: Xác suất của biến cố A là:

  $\boxed{\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}}$, ở đó $n(A),n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A,Ω.

2. Tính chất của xác suất

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $\mathrm{P}(\varnothing)=0;\mathrm{P}(\Omega)=1$;
- $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$ với mọi biến cố A;
- $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$ với mọi biến cố A.

3. Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng. Khi đó A,B là các tập con của không gian mẫu.

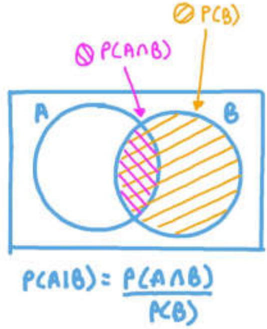
- Đặt $C=A\cup B$. Khi đó C là một biến cố và được gọi là ***biến cố hợp*** của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A\cup B$.
- Đặt $D=A\cap B$. Khi đó D là một biến cố và được gọi là ***biến cố giao*** của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A\cap B$ hay AB.
- Nếu $A\cap B=\varnothing$ thì A và B gọi là hai ***biến cố xung khắc***. Khi đó: $\mathrm{P}(A\cap B)=0$.
- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý

- $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$.
- Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$.

III. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là ***xác suất của*** A ***với điều kiện*** B, kí hiệu là $\mathrm{P}(A|B)$.



Nếu $\mathrm{P}(B)>0$ thì $\boxed{\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$.

Khi đó, suy ra: $\boxed{\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A|B)}$.

Chú ý

- Nếu A,B là hai biến cố bất kì thì $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)$.
  Công thức trên được gọi là ***công thức nhân xác suất***.
- Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(B)>0$. Khi đó, ta có: $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$.
- Cho hai biến cố A,B với $0<\mathrm{P}(A)<1,\ 0<\mathrm{P}(B)<1$.

  Khi đó, A và B là ***hai biến cố độc lập*** khi và chỉ khi $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|\overline{B})$ và $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|\overline{A})$.

IV. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A,B với $0<\mathrm{P}(B)<1$, ta có:

$$\boxed{\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap\overline{B})=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(\overline{B})\cdot\mathrm{P}(A|\overline{B})}.$$

2. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A,B với $\mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0$ ta có: $\boxed{\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)}}$.

Nhận xét: Với $\mathrm{P}(A)>0, 0<\mathrm{P}(B)<1$ thì công thức Bayes còn có dạng

$$\boxed{\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(\overline{B})\cdot\mathrm{P}(A|\overline{B})}}.$$

Trường THPT Phạm Phú Thứ

Tổ Toán, năm học 2024 - 2025

"

Những quyển sách mà bạn than đọc mãi không xong, có người đã xem hết.
Những đề thi bạn ngồi yên than khó làm không ra, cũng đã có người thức đêm tìm cách giải.
Những chuyện bạn luôn "còn nhiều thời gian để mai làm", thì biết bao người cố gắng làm nốt "chuyện hôm nay quyết không để ngày mai".
Vì vậy thật xin lỗi, ngôi trường mà bạn ao ước thi đỗ, người khác có thể ngang nhiên bước vào còn bạn chỉ có thể "ao ước".
Cuộc sống mà bạn muốn trải qua chỉ có thể ngậm ngùi đứng nhìn người khác trải qua!

"

Hy vọng, cuối cùng thành tích của các em sẽ không chỉ thắp sáng cả mùa hè, mà còn cả tương lai phía trước.
Chúc các em thành công!